ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1988
*****

P'

MATHEMATIQUES I
(2 pages dactylographiées)

On étudie dans ce problème la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^t \frac{x^n}{n!}$ *où t et x sont réels.*

Chaque fois que la série ci-dessus converge, on désigne sa somme par f(x, t).

PREMIERE PARTIE

I.1. Etablir que la série que l'on vient de définir converge en tout point (x, t) de $\mathbb{R}^2$, et que pour tout T réel et tout $x > 0$, la convergence est uniforme sur

$$]-x,x] \times]-\infty, T]$$

I.2. Montrer que, t étant fixé, la fonction qui à tout x associe f(x, t) est de classe C^1 et donner $f'_x(x,t)$ sous forme de somme d'une série. Démontrer la relation :

$$f(x, t+1) = x f'_x(x, t)$$

I.3.a) Exprimer, à l'aide des fonctions usuelles, f(x, 0) et f(x, 1).

b) Etablir que, pour tout t entier strictement positif, il existe un polynôme P_t tel que, pour tout x réel : $f(x, t) = e^x . P_t(x)$ et donner une relation de récurrence permettant de calculer P_{t+1} connaissant P_t.

c) Déterminer les coefficients de P_1, P_2, P_3, P_4.

d) Donner le dégré de P_t, ainsi que son terme de plus haut degré et son terme de plus bas degré. On ne cherchera pas à déterminer les autres termes de P_t, mais on montrera que ce sont des entiers naturels.

I.4.a) Montrer que, x étant fixé, la fonction qui à tout t associe f(x, t) est de classe C^2 et donner $f'_t(x, t)$ et $f''_{t^2}(x, t)$ sous forme de sommes de séries.

b) Etablir que $\lim_{t \to -\infty} f(x, t) = x$

(il pourra être utile d'observer que, pour tout $t < 0$ et pour tout $n \geq 2$, on a :
$0 \leq n^t \leq 2^t$).

Etudier de même la limite quand $t \to +\infty$ de $f'_t(x, t)$.

On suppose désormais, dans toute la suite du problème, que x est strictement positif.

DEUXIEME PARTIE

II.1. Question préliminaire

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels telles que les séries entières

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ aient un rayon de convergence infini.

On désigne par F(x) et G(x) les sommes respectives de ces séries. Enfin l'on suppose que a_n est strictement positif à partir d'un certain rang n_0.

a) Montrer que, si b_n est négligeable devant a_n lorsque n tend vers $+\infty$ alors G(x) est négligeable devant F(x) lorsque x tend vers $+\infty$. On pourra, pour cela, N étant convenablement choisi, mettre f(x) sous la forme

$$F(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$$ et faire de même pour G(x).

b) Montrer que, si l'on suppose cette fois que b_n est équivalent à a_n lorsque n tend vers $+\infty$, alors G(x) est équivalent à F(x) lorsque x tend vers $+\infty$.

II.2. En déduire que, lorsque t étant fixé, x tend vers $+\infty$:

$$f(x, t+1) \sim x f(x, t)$$

II.3. Démontrer que, pour tout entier naturel t, on a, lorsque x tend vers $+\infty$:

$$f(x, t) \sim e^x x^t$$

Etendre ce résultat au cas où t est un entier négatif.

II.4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites à termes positifs, telles que les séries de terme général u_n et v_n convergent. Démontrer que la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$ converge et que

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{u_n v_n}\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\right)$$

TOURNER LA PAGE

II.5. En déduire l'inégalité valable pour tout $x > 0$, pour tout t et pour t' :

$$f\left(x, \frac{t+t'}{2}\right) \leq \sqrt{f(x,t)\ f(x,t')}$$

II.6.a) Soit ϕ une application de classe C^2 de R dans R, vérifiant pour tout t et tout t' :

$$\phi\left(\frac{t+t'}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\phi(t) + \phi(t')\right)$$

En étudiant la limite, lorsque h tend vers 0_+, de

$$\frac{\phi(u+h) + \phi(u-h) - 2\phi(u)}{h^2}$$

établir que la fonction ϕ' est croissante au sens large.

b) En déduire que, pour tout $x > 0$, la fonction qui à t associe $\ln(f(x,t))$ est convexe.

II.7. *On pose dans toute la suite du problème, pour tout $x > 0$ et pour tout t,* $h(x,t) = \ln(f(x,t)\, e^{-x}\, x^{-t})$, le symbole ln désignant le logarithme népérien.
On étudie ici les variations de cette fonction pour x fixé ($x > 0$), t décrivant R.

a) Etablir que la fonction $t \to h(x,t)$ est une fonction à dérivée croissante au sens large.

b) Etudier le signe de $h(x,1) - h(x,0)$.

c) Montrer que la fonction $t \to h(x,t)$ est strictement croissante dans $[1, +\infty[$.

II.8.a) Etablir la double inégalité suivante, où $x > 0$, $t \geq 1$, et où m désigne la partie entière de t (m entier tel que $m \leq t < m+1$)

$$\frac{P_m(x)}{x^m} \leq \frac{f(x,t)}{e^x . x^t} \leq \frac{P_{m+1}(x)}{x^{m+1}}$$

b) En déduire la limite de $\dfrac{f(x,t)}{e^x . x^t}$ quand, t étant fixé ($t \geq 1$), x tend vers $+\infty$.

c) Quel est pour $x > 0$ et $t > 1$, le signe de $f(x,t) - e^x x^t$? Que se passe-t-il si $t = 1$?

II.9.a) Soit $x > 0$ et $t \in [0,1]$.

Etablir l'inégalité $h(x,t) \leq (1-t)\, h(x,0) + t\, h(x,1)$

b) En déduire que, si $0 < t < 1$, on a : $f(x,t) < x^t e^x$.
Que se passe-t-il si $t = 0$?

II.10. Etablir que, pour tout $t \in R$ donné, on a, lorsque x tend vers $+\infty$, l'équivalence $f(x,t) \sim x^t . e^x$

TROISIEME PARTIE

On se propose ici de discuter le signe de la fonction $D(x,t) = f(x,t) - x^t e^x$ pour $x > 0$ et $t < 0$ (on rappelle que la discussion pour $t \geq 0$ a été faite dans la partie précédente)

III.1. On fixe ici la valeur de x, t variant seul.

a) Etudier la limite, lorsque t tend vers $-\infty$, de $h(x,t)$.
b) Etudier de même la limite de $h'_t(x,t)$ quand t tend vers $-\infty$.
c) On suppose que x est inférieur au sens large à 1. Etablir que la fonction $t \to h(x,t)$ est croissante dans R et que :
$\forall x \leq 1,\ \forall t < 0,\ D(x,t) < 0$

III.2. On suppose x fixé, $x > 1$.

a) Etablir que la fonction $t \to h(x,t)$ a exactement un zéro dans $]-\infty, 0[$, que l'on notera $0(x)$.
b) Donner le signe de $D(x,t)$ selon la position de t par rapport à $0(x)$.

*** FIN ***

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail